数理解析研究所講究録
16巻 1966年 3-12

物理的に見た最適過程の理論

京都大学工学部　布　川　　昊

1. はしがき

自然科学の目的は、自然界の存在の理法を究めること、であるから、人間は観照者の立場に立つているわけである。これに反し、工学においては、人間は自然の営みに積極的に参加する姿勢をとつているのであるから、工学の目的は、自然の在り方と人間の意志ないしは希望との隔合調和の仕方を明らかにすることである、と考えることができるかもしれない。この見地からすれば、制御系と力学系との本質的な差違は、前者が操作 (Control) という概念を含んでいるところに在り、人間は、この操作を通して、自然にある働き掛けを行うのである。この働き掛けによつて、自然の固有の調和が乱されてゆく。その有様は、丁度池に石を投げ込んだときに生ずる波紋の拡がるように行なわれるものと想像される。このような立場から、制御理論を見直すことが、本稿の目的である。

2. 制御系の方程式とその解釈

状態変数を n 次元ベクトル x 、操作変数を r 次元ベクトル u で表わすことにすれば、制御系の方程式は一般に、

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad u \in U \tag{1}$$

で表わされる。ここで U は操作の許容範囲で、 r 次元の compact な部分集合とする。なお、この系の再現性、つまり、ある時刻における x の値とそれ以後の操作の仕方が与えられるならば、(1) の解が一意に定まることは保証されているものとする。

さて、 (1) において、 $u \in U$ を一つ指定すれば、状態空間 X の各点 x で、一つのベクトル x が定まる。したがつて、すべての可能な操作U に対しては、一組のベクトルの集合、すなわち、系の状態の推移の可能な方向と、その各方向に対する dt 時間後における変位の大きさ $\|dx\|$ が定まることになる。この意味で、 (1) 式は状態空間の各点において、乱れの源ともなり、又その乱れの伝播を担うところの「素波」を定義していると見倣すことができる。

一方直積空間 $X \times T$ (T は時間)において考えれば、 (1) 式によつて、各点において、上(時間の正の方向)に開いた「錐」が配置されていることになる。

3. 波面とホイヘンスの原理

(1) 式において、 $u(t) \in U$ を指定すれば、制御系の状態は、そのような強制力と、自然の法則とに従いながら、移り変り、状態空間 X (直積空間 $X \times T$)において、一つの曲線(軌道)を画く。この曲線は、よく知られているように、 Euler の折線で近似的に表わすことができる。さて、すべての許し得る control $u \in U$ に対応しては、無数の曲線群が得られるわけであるが、それを個々に吟味するよりも、それらを一括して、全体としての性格を考察する方が便利である。その場合、 Euler の折線を構成する線分(線素)に対応するものは、 §2 に述べた素波である。折線によつて近似的に構成される解曲線に相当して、今度は、 Huygens の構成法により、素波を二次波として空間に拡がる波面が得られる。この波面の式を $S(x,t) = 0$ とおけば、その構成法から、容易に波面を求める方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sup_{u \in U} \langle \operatorname{grad} S \mid f(x,u) \rangle = 0 \tag{2}$$

を得る。ここで記号 <|> は内積を表わすものとする。一般には、波面は滑らかとは限らないが、以下適当な滑らかさを仮定しておく。

ところで、(2) 式を導くためには、状態空間 X で考えるよりも、直積空間 X × T で考える方が分り易い。§2 の終りに述べたように、(1) 式を「モンジュの錐」と見倣して、この錐に接する曲面の方程式を作れば、直ちに (2) 式が得られる。この曲面の t = const. の平面による切口の X への射影が波面である。また、この曲面 S(x,t) = 0 は Roxin の定義した可達集合 (Reachable Set) の境界（縁）である。縁が存在するか否かは最適解の存在の有無に連なる問題であるが、これについては触れないことにする。

さて光学における Huygens の原理と Fermat の原理との同等性を想起すれば、ここから最短時間制御問題の解が得られ、従つて又、多くの他の制御過程の問題の解が得られることと期待される。

4. 波面を構成する軌道

時刻 $t = 0$ に状態空間の一点 A から発した波紋が時刻 t までに拡がり得る限界が、その時刻の波面 (Wave front) σ_t である。換言すれば、A から σ_t 上の任意の点 B へ達するに要する時間の最小値が t である。このように、波面を構成する軌道は最短時間軌道であるが、この軌道はどの瞬間においても、最短時間軌道つまり波面を構成する軌道である。それは波面の構成法、すなわち時刻 t の波面 σ_t 上の各点は、夫々ある素波と共通である、ところがその素波の中心は他の波面上の点でなければならないからである。逆に言えば、一度波面からとり残された軌道は、再び波面に追いつくことはない。この事実は物理的には自明である。直積空間 T × X

で考えれば、ある時刻に Reachable Set の境界上に在る軌道は、それ以前の任意の時刻においても境界上になければならないことを意味し、微分方程式の解の初期値に対する連続性からの帰結である。これが最大原理の物理的内容である。

次に、波面を構成する軌道の方程式を求めよう。それは、偏微分方程式(2)と等価な一組の連立常微分方程式になるはずである。(2) 式は一見線型の一階偏微分方程式であるが、操作 $\max u \in U$ をも含めて考えれば、非線型である。それはまた、制御系の方程式 (1) がモンジュの「錐」に相当し、退化して「軸」となつていないことからも知られることである。従つて、(2) 式と等価な常微分方程式は、(1) 式の外に grad S に対するものが加わらねばならない。いま grad $S \equiv \psi$ とおけば、これの式と (1) 式をまとめて

$$
\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}
$$

$$
H \equiv \sup_{u \in U} \langle \psi | f \rangle \tag{3}
$$

と書くことができる、とくに自律系においては、関数 H は第１積分である。

5. 種々の型の最適過程と横断性の条件

ここでは、代表例として、最短時間問題と制御過程の問題を考える。(1) 式に従う系の最短時間問題は、§ 4 で述べたように、(3) 式を解けばよい。両端固定の場合は、それ以上の情報は無い。もし終端がある（滑らかな）

曲面上に拘束されている場合には、横断条件が得られる。終端がどこへくるかは、物理的には明らかである。それは、始点から発した波面が初めて曲面と接する点である。その点の特徴は次の様に表現される。その点における曲面への接平面はまた波面への接平面である。それ故、 ψ はその接平面と直交する。始点がある曲面上に拘束されている場合の横断条件も全く同様である。その曲面が波面そのものとなるからである。

次に制御過程の問題を考えよう。それは (1) 式の系を適当に操作して

$$J = \int_0^T P(x,u)dt \tag{4}$$

上の汎関数を最小または最大にせよ、という問題である。問題を判然させるために、始点は固定、終点は自由、積分の上限 T は固定の問題を考えよう。
(4) 式から、

$$\frac{dy}{dt} = P(x,u) \tag{5}$$

なる微分方程式を作り、これと (1) 式とを合せて $n+1$ 個の式について、 $n+1$ 次元空間での波面を考えればよい。この空間での $t = T$ の波面 σ_T^{n+1} の y 座標が (4) の積分の値である。従つて y 座標の最大または最小となる点が、最適軌道の終点である。その条件は、 $n+1$ 次元空間における波面の式を $S(x,y,t) = 0$ で表わせば次式で与えられる。

$$\frac{\partial S(x,y,T)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

すなわち ψ は $t = T$ で空間 X に直交する。またこのとき f にも P にも y は含まれていないので、 (3) 式から分る様に $\partial S/\partial y$ は定数である。この符号によつて最大または最小が定まる。また (6) 式は任意の

$t < T$ に対して成立つわけではないから、各瞬間の波面 σ_t の y 座標が、最適軌道に沿つて最大（小）となつているわけではない。

次に積分の上限 T が自由（または ∞）となつているとき、y が極値をとるのは、波面が y 方向への拡がりを（一時）停止するときであるから、(6) 式の他に

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

が付け加わる。自律系では、(7) 式は最適軌道に沿つて常に成立している。それ故、関数 H は常に消える（零となる）。このことから、最適軌道はある円柱の表面を走つている。いい換えれば、波面はその円柱に巻きついていることが分る。その円柱の式は (2) 式に相当する式から (7) を考慮して解けば得られる。明らかに y については線型である。

6. 特異な場合

最大原理を用いて、最適問題を解く場合、H 関数を最大にするという事からだけは、control u が定まらない場合がある。その様なものを特異な場合と呼んでいる。そのような場合が起る理由は、素波 (1) の形状が多様であつて、従つて、波面の形成され方に種々の型が生ずるためである。一番簡単な二次元で考えてみよう。素波が線分であるとする。図 1 で、矢印は u を固定した場合のベクトル $f(x,u)\,dt$ 表わす。波面を構成するべ

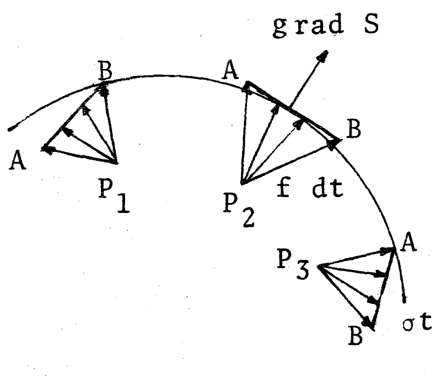

図 1

クトル $f(x,u^*)dt$ は σ_t の法線ベクトルとの内積が最大となるものである（(3) 式参照）。図1の P_1, P_3 に対しては、その様なベクトルは P_1B, P_3A と一意に定まるが、P_2 の場合には、どのベクトル f も grad S との内積が一定していて、max. となる $u^* \in U$ を選ぶことができないことが分る。しかし特異解と言えども波面を構成する軌道であるから、Reachable Set の境界上にあることに変りはない。特異解に沿つて、波面 σ_t は滑らかであると考えられる。

$$\ddot{x} = u, \qquad |u| \leq 1 \tag{8}$$

の場合には、特異解は現われずその可能性のある所で、波面は角を持つている。そこは ±1 の切替線である。最適軌道は角を横切らない。その理由は、角で ψ が不連続になるからである。(3) 式より ψ 自身は連続である。尚特異解の中には、状態空間の一点で静止したり、または周期的になることがある。(2) 式で内積の部分が零となるような場合などで、そのとき $\partial s/\partial t = 0$ であるから、§5 の終りに述べた事柄が成立つのである。一般に、古典変分学の立場から見れば、特異解は実は正常解である Bang-Bang こそ異常である。

7. D.P. との関係

D.P. と M.P. との関係は多くの人々によつて論じられて来たが、ここでは波面の立場から簡単に考察を加える。

制御系としては、依然 (1) 式を考える。いま空間内の各点 x から、ある特定の一点（原点）に、許容操作によつて、到達し得る時間の最小値を空間 X × T にプロットして出来る曲面を $t = V(x)$ とする。さて今現象の経過を時間の逆方向に辿つてみよう。そのために (1) の系の代りに、

$$\frac{dx}{dt} = -f(x,u) \qquad u \in U \tag{9}$$

なる系を考える。 V(x) は、系 (9) について言えば、原点から x へ辿り得る最小時間である。従つて、 V(x) = const. は系 (9) の画く波面である。いまその波面の式を $S(x,t) \equiv V(x)-t = 0$ とおいて、 (2) 式を適用すれば

$$-1 + \sup_{u \in U} \langle \operatorname{grad} V | -f \rangle = 0 ,$$

$$\text{i.e.} \quad -1 = \inf_{u \in U} \langle \operatorname{grad} V | f \rangle \tag{10}$$

を得る。この式は、 D.P. の常套手段

$$V(x + dx) + dt - V(x) \geqq 0, \qquad dx = f(x,u)dt \tag{11}$$

より得られるものと同じ式である。従つてベルマンの偏微分方程式は波面の方程式であることが分る。ただし (1) 式と (9) 式の相違を考慮に入れた上の話である。今 (10)式の初めの式で

$$V(x) = -W(x) \tag{12}$$

と置き替えれば、

$$-1 + \sup_{u \in U} \langle \operatorname{grad} W | f \rangle = 0 \tag{13}$$

を得る。この式は、 (2) 式と同じものである。ただし、波面 S(x,t)=0 を t について解いて t=W(x) とおいてある。さて、 (13) 式は、すでに述べたように、一点から四方に拡がる波面を表わし、 (10) 式は、一点

に収束する波面を表わしている。(12) 式は $t > 0$ の世界で拡がる波紋は、それ以前の $t < 0$ の世界では、その点へ収縮する波紋であることを意味する。幾何学的に言えば、D.P. と M.P. とから導かれる結果は $t = 0$ の面に対して、互に鏡像の関係にあると言える。

8. 安定・可制御

一点から拡がる波面（湧出口）、一点へ収束する波面（吸込口）という考え方は、その点の安定、不安定という問題を想起させる。一点への最短時間制御という事から、その点が超漸近安定になつていることが分る。事実 (10) 式は、そのように設計された系に対して、$V(x)$ が Liapunov 関数となつている事を示している。定義より $V(x) > 0$, $V(0) = 0$, $\dot{V} = -1 < 0$ である。もちろん $V = \text{const.}$ は、一般には、滑らかでも、また、閉曲線でもないから、問題はそれ程単純ではない。

また一点へ収束する波面という見方は、可制御の問題へもつながる。当然のこと乍ら、(10) 式を満足する解の存在は、可制御の十分条件である。もつと一般には

$$\psi + \langle \mathrm{grad}\phi | f \rangle = 0 \qquad (14)$$

を満足する。$\psi, \phi > 0$, $u \in U$ を見出すことが（準）可制御のための十分条件である。$\psi \geqq \varepsilon > 0$ なら「準」は不要である。

9. むすび

以上、制御とは何か？という疑問から発して、できるだけ一貫した考え方に添つて制御の問題を取扱つたが、誤りも多々あると思われるので十分御検討をお願いします。

10. 文献

(1) E. Roxin: Axiomatic foundation of the theory of control systems;

(2) E. Roxin: A Geometric Interperetation of Pontryagin's Maximum Principle.

(3) I. M. Gelfand et al.: Calculus of Variations.

(4) R. Courant & D. Hilbert: Method of Mathematical Physics. Vol. II.

(5) L. S. Pontryagin et al.: The Mathematical Theory of Optimal Processes.

(6) R. Bellman: Dynamic Programming.